Ann. Biol. anim., Bioch. Biophys., 1966, **6** (1), 117-120.

LA RELATION DE DÉPENDANCE ENTRE GÈNES NON-IDENTIQUES [1]

M. GILLOIS

Station centrale de Génétique animale,
Centre national de Recherches zootechniques, 78-Jouy-en-Josas.

La présentation logique de l'interprétation génique et chromosomique de l'hérédité que nous avons proposée au cours d'études précédentes est perfectible.

« Deux gènes sont identiques, si et seulement si, ils dérivent par descendance mendélienne, en l'absence de mutation, d'un même gène ancêtre. C'est une relation binaire d'équivalence qui induit sur tout ensemble de gènes une partition en sous-ensembles disjoints appelés *classes d'identité*. Les gènes appartenant à une même classe sont *identiques* ; la connaissance de la nature d'un seul permet de déterminer la nature de tous les autres, car il existe entre eux une relation matérielle : ils sont la copie non modifiée par les mutations d'un même modèle, le gène ancêtre. Deux gènes appartenant à deux classes d'identité distinctes sont indépendants, car la connaissance de la nature de l'un ne permet pas de déterminer avec certitude la nature de l'autre. » (M. GILLOIS, 1964).

Cette étude des propriétés de la relation d'identité n'est pas assez élaborée, car elle suppose implicitement que la non-identité entre gènes entraîne leur indépendance. Deux gènes appartenant à deux classes d'identité distinctes sont *non-identiques*. C'est un abus de langage et une source de confusion que de dire que ces gènes sont indépendants.

Introduisons la relation binaire de dépendance sous ses trois aspects :

1° Deux gènes sont *absolument dépendants* si la connaissance de la classe d'isoaction de l'un nous renseigne avec certitude sur la nature de la classe d'isoaction de l'autre. Cette connaissance n'implique pas qu'il s'agisse de deux gènes isoactifs.

2° Deux gènes sont *indépendants* si la connaissance de la classe d'isoaction de l'un n'apporte aucune information permettant de modifier notre incertitude quant à la nature de l'autre. La probabilité conditionnelle reste égale à la probabilité *a priori* de la classe d'isoaction.

3° Deux gènes sont *dépendants en probabilité* si la connaissance de la classe d'isoaction de l'un modifie le degré d'incertitude attaché à la connaissance de la nature de l'autre.

[1] Communication faite aux Journées d'Études de la Commission de Génétique de la Fédération européenne de Zootechnie, La Haye, juin 1965.

Deux gènes identiques sont absolument dépendants, car la connaissance de la nature de l'un nous donne toute l'information nécessaire quant à la nature de l'autre. Deux gènes non-identiques peuvent avoir leurs états géniques aussi bien absolument dépendants qu'indépendants.

Utilisons ces nouvelles définitions pour décrire la structure génique *a priori* d'un zygote H dont nous considérons les deux gènes homologues G_H et G^*_H.

Deux situations d'identité sont possibles :

$$\mathcal{S}_1 = \{(G_H \equiv G^*_H)\} \text{ avec la probabilité } f,$$

et

$$\mathcal{S}_2 = \{(G_H) \not\equiv (G^*_H)\} \text{ avec la probabilité } (1 - f).$$

$\mathcal{S}_1$ est la situation pour laquelle G_H est *identique* à G^*_H ;
$\mathcal{S}_2$ est la situation pour laquelle G_H est *non-identique* à G^*_H.

Soient a_i, a_j les représentants de deux classes d'isoaction quelconques du groupe auquel le zygote H appartient. Soient p_i et p_j les probabilités *a priori* attachées aux classes d'isoaction a_i et a_j.

Supposons la situation $\mathcal{S}_2$ réalisée. Nous connaissons la classe d'isoaction du gène G_H, soit a_i. La probabilité de la réalisation des événements $\mathcal{S}_2$ et $G_H = a_i$ est $(1 - f)p_i$.

*Dans ces conditions G^*_H peut être *absolument indépendant* de G_H; la probabilité conditionnelle de cette absolue dépendance est α.

G^*_H peut être a_i, avec la probabilité conditionnelle α_i ; α_i est la probabilité conditionnelle pour que G^*_H soit a_i et absolument dépendant de G_H, sachant que $\{G_H \not\equiv G^*_H\}$ et $\{G_H \in a_i\}$.

G^*_H peut être a_j, avec la probabilité conditionnelle α_j ; α_j est la probabilité conditionnelle pour que G^*_H soit a_j et absolument dépendant de G_H, sachant que $\{G_H \not\equiv G^*_H\}$ et $\{G_H \in a_i\}$ d'où la relation : $\sum\limits_i \alpha_i = \alpha$.

Si α_i est une quelconque de ces probabilités conditionnelles.

**Dans ces mêmes conditions G^*_H peut être *indépendant* de G_H ; la probabilité conditionnelle de cette indépendance est $(1 - \alpha)$.

G^*_H peut être a_j, avec la probabilité conditionnelle p_j, probabilité *a priori* attachée à la classe d'isoaction a_j.

La probabilité pour que G^* soit indépendant de G et appartienne à la classe d'isoaction a_i sachant que $\{G_H \not\equiv G^*_H\}$ et $\{G_H = a_i\}$ est $(1 - \alpha)p_i$.

Dans un tel groupe, la probabilité *a priori* de tirer un homozygote $[a_i\ a_i]$ est

$$\mathcal{T}(a_ia_i) = fp_i + (1 - f)\, p_i\alpha_i + (1 - f)\, p_i\, (1 - \alpha)\, p_i,$$
$$\mathcal{T}(a_ia_i) = fp_i + (1 - f)\, p_i\alpha_i + (1 - \alpha)\, p_i.$$

En introduisant les probabilités conditionnelles β_j, β_i, $1 - \beta$, la probabilité *a priori* de tirer un hétérozygote a_ia_j est

$$\mathcal{T}(a_ia_j) = (1 - f)\, p_i\alpha_j + (1 - f)\, p_j\beta_i + (1 - f)\,(1 - \alpha)\, p_ip_j + (1 - f)\,(1 - \beta)\, p_ip_j.$$
$$\mathcal{T}(a_ia_j) = (1 - f)\, p_i\,[\alpha_j + (1 - \alpha)\, p_j] + (1 - f)\, p_j\,[\beta_i + (1 - \beta)\, p_i].$$

Nous avons donc :

$$\mathcal{T}(a_ia_i) = fp_i + (1 - f)\, p_i\alpha_i + (1 - \alpha)\, p_i,$$
$$\mathcal{T}(a_ia_j) = (1 - f)\,\{p_i\,[\alpha_j + (1 - \alpha)\, p_j] + p_j\,[\beta_i + (1 - \beta)\, p_i]\}.$$

Posons :

$$\begin{aligned} \alpha_i + (1 - \alpha)\, p_i &= y_i = \mathrm{I}_i\,; \\ \alpha_j + (1 - \alpha)\, p_j &= y_j = \mathrm{I}_j\,; \\ \beta_i + (1 - \beta)\, p_i &= z_i = \mathrm{J}_i\,; \\ \beta_j + (1 - \beta)\, p_j &= z_j = \mathrm{J}_j. \end{aligned}$$

I_i est la probabilité conditionnelle attachée au zygote H d'avoir un gène $G^*_H = a_i$ sachant que $\{ G_H \not\equiv G^*_H \}$ et $\{ G_H = a_i \}$.

I_j est la probabilité conditionnelle attachée au zygote H d'avoir un gène $G^*_H = a_j$ sachant que $\{ G_H \not\equiv G^*_H \}$ et $\{ G_H = a_i \}$.

Les probabilités J_i et J_j ont un sens analogue à la permutation près des indices i et j.

Si I_i est égale à p_i, les deux gènes sont indépendants, si I_i est différent de p_i, les deux gènes sont dépendants en probabilité.
d'oû les écritures nouvelles suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}\,(a_i a_i) &= f p_i + (1 - f)\, p_i \mathrm{I}_i\,; \\ \mathcal{I}\,(a_i a_j) &= (1 - f)\, p_i \mathrm{I}_j + (1 - f)\, p_j \mathrm{I}_j\,; \\ \mathcal{I}\,(a_j a_j) &= f p_j + (1 - f)\, p_j \mathrm{I}_j. \end{aligned}$$

Remarquons que $p_i \mathrm{I}_j = p_j \mathrm{J}_i$.

Dans le cas d'un groupe où les probabilités d'absolue dépendance entre gènes homologues et non-identiques d'un zygote sont nulles, $(1 - \alpha = 1,\ \alpha_i = 0,\ \alpha_j = 0)$, nous avons :

$$\begin{aligned} p_i &= \mathrm{I}_i\,; \\ p_j &= \mathrm{I}_j. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}\,(a_i a_i) &= f p_i + (1 - f)\, p^2{}_i\,; \\ \mathcal{I}\,(a_i a_j) &= (1 - f)\, 2 p_i p_j\,; \\ \mathcal{I}\,(a_j a_j) &= f p_j + (1 - f)\, p^2{}_j. \end{aligned}$$

Ces dernières expressions ne sont valables que pour un groupe où la dépendance absolue n'est entraînée que par l'identité, ce qui est le cas des populations panmictiques.

Nos précédents travaux n'avaient pas abordé l'analyse des rapports qui existent entre la relation d'identité des gènes et la relation de dépendance de leurs états géniques. La consanguinité et la parenté traduisent les filiations des individus ; l'identité et la non-identité des gènes décrivent leurs états biochimiques les uns par rapport aux autres ; l'absolue dépendance, la dépendance en probabilité et l'indépendance s'attachent aux variations du degré d'incertitude concernant la détermination de la nature d'un gène quant est connue la nature d'un autre gène. Un tel effort de logique peut paraître bien académique, mais les résultats nouveaux que nous avons déjà pu atteindre justifient amplement une telle abstraction.

Reçu pour publication en novembre 1965.

SUMMARY

RELATION OF DEPENDENCY BETWEEN NON-IDENTICAL GENES

The relation of identity between genes allows the definition of an isoactive dependency relation between these genes. However, if two genes are non-identical, can we infer that they are independant? Evidently, this is not so. In this work, we have shown that reciprocal implication between non-identity and independency is not true but in this case of random mating populations. In the other cases, in which occurs either homogamy or selection this reciprocal implication does not exist and the idea of identity between genes loses partly its interest. This is the reason why we introduce a more general concept, that is the relation of dependency between non-identical genes. This relation has three states : absolute isoactive dependency ; absolute heteroactive dependency, independency.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

GILLOIS M., 1964. *La relation d'identité en génétique*. Thèse Fac. Sciences, Paris, 294 pp.