

## LA RELATION DE DÉPENDANCE ENTRE GÈNES NON-IDENTIQUES (1)

M. GILLOIS

*Station centrale de Génétique animale,  
Centre national de Recherches zootechniques, 78-Jouy-en-Josas.*

La présentation logique de l'interprétation génique et chromosomique de l'hérédité que nous avons proposée au cours d'études précédentes est perfectible.

« Deux gènes sont identiques, si et seulement si, ils dérivent par descendance mendélienne, en l'absence de mutation, d'un même gène ancêtre. C'est une relation binaire d'équivalence qui induit sur tout ensemble de gènes une partition en sous-ensembles disjoints appelés *classes d'identité*. Les gènes appartenant à une même classe sont *identiques* ; la connaissance de la nature d'un seul permet de déterminer la nature de tous les autres, car il existe entre eux une relation matérielle : ils sont la copie non modifiée par les mutations d'un même modèle, le gène ancêtre. Deux gènes appartenant à deux classes d'identité distinctes sont indépendants, car la connaissance de la nature de l'un ne permet pas de déterminer avec certitude la nature de l'autre. » (M. GILLOIS, 1964).

Cette étude des propriétés de la relation d'identité n'est pas assez élaborée, car elle suppose implicitement que la non-identité entre gènes entraîne leur indépendance. Deux gènes appartenant à deux classes d'identité distinctes sont *non-identiques*. C'est un abus de langage et une source de confusion que de dire que ces gènes sont indépendants.

Introduisons la relation binaire de dépendance sous ses trois aspects :

1° Deux gènes sont *absolument dépendants* si la connaissance de la classe d'isoaction de l'un nous renseigne avec certitude sur la nature de la classe d'isoaction de l'autre. Cette connaissance n'implique pas qu'il s'agisse de deux gènes isoactifs.

2° Deux gènes sont *indépendants* si la connaissance de la classe d'isoaction de l'un n'apporte aucune information permettant de modifier notre incertitude quant à la nature de l'autre. La probabilité conditionnelle reste égale à la probabilité *a priori* de la classe d'isoaction.

3° Deux gènes sont *dépendants en probabilité* si la connaissance de la classe d'isoaction de l'un modifie le degré d'incertitude attaché à la connaissance de la nature de l'autre.

(1) Communication faite aux Journées d'Études de la Commission de Génétique de la Fédération européenne de Zootechnie, La Haye, juin 1965.

Deux gènes identiques sont absolument dépendants, car la connaissance de la nature de l'un nous donne toute l'information nécessaire quant à la nature de l'autre. Deux gènes non-identiques peuvent avoir leurs états géniques aussi bien absolument dépendants qu'indépendants.

Utilisons ces nouvelles définitions pour décrire la structure génique *a priori* d'un zygote H dont nous considérons les deux gènes homologues  $G_H$  et  $G^*_H$ .

Deux situations d'identité sont possibles :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= \{ (G_H \equiv G^*_H) \} \text{ avec la probabilité } f, \\ \text{et} \quad \mathcal{S}_2 &= \{ (G_H \not\equiv G^*_H) \} \text{ avec la probabilité } (1 - f). \end{aligned}$$

$\mathcal{S}_1$  est la situation pour laquelle  $G_H$  est *identique* à  $G^*_H$  ;

$\mathcal{S}_2$  est la situation pour laquelle  $G_H$  est *non-identique* à  $G^*_H$ .

Soient  $a_i, a_j$  les représentants de deux classes d'isoaction quelconques du groupe auquel le zygote H appartient. Soient  $p_i$  et  $p_j$  les probabilités *a priori* attachées aux classes d'isoaction  $a_i$  et  $a_j$ .

Supposons la situation  $\mathcal{S}_2$  réalisée. Nous connaissons la classe d'isoaction du gène  $G_H$ , soit  $a_i$ . La probabilité de la réalisation des événements  $\mathcal{S}_2$  et  $G_H = a_i$  est  $(1 - f)p_i$ .

\*Dans ces conditions  $G^*_H$  peut être *absolument indépendant* de  $G_H$ ; la probabilité conditionnelle de cette absolue dépendance est  $\alpha$ .

$G^*_H$  peut être  $a_i$ , avec la probabilité conditionnelle  $\alpha_i$ ;  $\alpha_i$  est la probabilité conditionnelle pour que  $G^*_H$  soit  $a_i$  et absolument dépendant de  $G_H$ , sachant que  $\{ G_H \not\equiv G^*_H \}$  et  $\{ G_H \in a_i \}$ .

$G^*_H$  peut être  $a_j$ , avec la probabilité conditionnelle  $\alpha_j$ ;  $\alpha_j$  est la probabilité conditionnelle pour que  $G^*_H$  soit  $a_j$  et absolument dépendant de  $G_H$ , sachant que  $\{ G_H \not\equiv G^*_H \}$  et  $\{ G_H \in a_i \}$  d'où la relation :  $\sum_i \alpha_i = \alpha$ .

Si  $\alpha_i$  est une quelconque de ces probabilités conditionnelles.

\*\*Dans ces mêmes conditions  $G^*_H$  peut être *indépendant* de  $G_H$ ; la probabilité conditionnelle de cette indépendance est  $(1 - \alpha)$ .

$G^*_H$  peut être  $a_j$ , avec la probabilité conditionnelle  $p_j$ , probabilité *a priori* attachée à la classe d'isoaction  $a_j$ .

La probabilité pour que  $G^*$  soit indépendant de  $G$  et appartienne à la classe d'isoaction  $a_i$  sachant que  $\{ G_H \not\equiv G^*_H \}$  et  $\{ G_H = a_i \}$  est  $(1 - \alpha)p_i$ .

Dans un tel groupe, la probabilité *a priori* de tirer un homozygote  $[a_i a_i]$  est

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(a_i a_i) &= fp_i + (1 - f) p_i \alpha_i + (1 - f) p_i (1 - \alpha) p_i, \\ \mathcal{P}(a_i a_i) &= fp_i + (1 - f) p_i \alpha_i + (1 - \alpha) p_i. \end{aligned}$$

En introduisant les probabilités conditionnelles  $\beta_j, \beta_i, 1 - \beta$ , la probabilité *a priori* de tirer un hétérozygote  $a_i a_j$  est

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(a_i a_j) &= (1 - f) p_i \alpha_j + (1 - f) p_j \beta_i + (1 - f) (1 - \alpha) p_i p_j + (1 - f) (1 - \beta) p_i p_j, \\ \mathcal{P}(a_i a_j) &= (1 - f) p_i [\alpha_j + (1 - \alpha) p_j] + (1 - f) p_j [\beta_i + (1 - \beta) p_i]. \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(a_i a_i) &= fp_i + (1 - f) p_i \alpha_i + (1 - \alpha) p_i, \\ \mathcal{P}(a_i a_j) &= (1 - f) \{ p_i [\alpha_j + (1 - \alpha) p_j] + p_j [\beta_i + (1 - \beta) p_i] \}. \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned}\alpha_i + (1 - \alpha) p_i &= y_i = I_i; \\ \alpha_j + (1 - \alpha) p_j &= y_j = I_j; \\ \beta_i + (1 - \beta) p_i &= z_i = J_i; \\ \beta_j + (1 - \beta) p_j &= z_j = J_j.\end{aligned}$$

$I_i$  est la probabilité conditionnelle attachée au zygote H d'avoir un gène  $G^*_H = a_i$  sachant que  $\{G_H \neq G^*_H\}$  et  $\{G_H = a_i\}$ .

$I_j$  est la probabilité conditionnelle attachée au zygote H d'avoir un gène  $G^*_H = a_j$  sachant que  $\{G_H \neq G^*_H\}$  et  $\{G_H = a_i\}$ .

Les probabilités  $J_i$  et  $J_j$  ont un sens analogue à la permutation près des indices  $i$  et  $j$ .

Si  $I_i$  est égale à  $p_i$ , les deux gènes sont indépendants, si  $I_i$  est différent de  $p_i$ , les deux gènes sont dépendants en probabilité. d'où les écritures nouvelles suivantes :

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(a_i a_i) &= f p_i + (1 - f) p_i I_i; \\ \mathfrak{F}(a_i a_j) &= (1 - f) p_i I_j + (1 - f) p_j I_j; \\ \mathfrak{F}(a_j a_j) &= f p_j + (1 - f) p_j I_j.\end{aligned}$$

Remarquons que  $p_i I_j = p_j I_i$ .

Dans le cas d'un groupe où les probabilités d'absolue dépendance entre gènes homologues et non-identiques d'un zygote sont nulles, ( $1 - \alpha = 1$ ,  $\alpha_i = 0$ ,  $\alpha_j = 0$ ), nous avons :

$$\begin{aligned}p_i &= I_i; \\ p_j &= I_j.\end{aligned}$$

Ce qui entraîne :

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(a_i a_i) &= f p_i + (1 - f) p_i^2; \\ \mathfrak{F}(a_i a_j) &= (1 - f) 2 p_i p_j; \\ \mathfrak{F}(a_j a_j) &= f p_j + (1 - f) p_j^2.\end{aligned}$$

*Ces dernières expressions ne sont valables que pour un groupe où la dépendance absolue n'est entraînée que par l'identité, ce qui est le cas des populations panmixtiques.*

Nos précédents travaux n'avaient pas abordé l'analyse des rapports qui existent entre la relation d'identité des gènes et la relation de dépendance de leurs états géniques. La consanguinité et la parenté traduisent les filiations des individus ; l'identité et la non-identité des gènes décrivent leurs états biochimiques les uns par rapport aux autres ; l'absolue dépendance, la dépendance en probabilité et l'indépendance s'attachent aux variations du degré d'incertitude concernant la détermination de la nature d'un gène quant est connue la nature d'un autre gène. Un tel effort de logique peut paraître bien académique, mais les résultats nouveaux que nous avons déjà pu atteindre justifient amplement une telle abstraction.

## SUMMARY

## RELATION OF DEPENDENCY BETWEEN NON-IDENTICAL GENES

The relation of identity between genes allows the definition of an isoactive dependency relation between these genes. However, if two genes are non-identical, can we infer that they are independant? Evidently, this is not so. In this work, we have shown that reciprocal implication between non-identity and independency is not true but in this case of random mating populations. In the other cases, in which occurs either homogamy or selection this reciprocal implication does not exist and the idea of identity between genes loses partly its interest. This is the reason why we introduce a more general concept, that is the relation of dependency between non-identical genes. This relation has three states : absolute isoactive dependency ; absolute heteroactive dependency, independency.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

GILLOIS M., 1964. *La relation d'identité en génétique*. Thèse Fac. Sciences, Paris, 294 pp.

---